

(付録: 詳細証明の追記)

[補題 A1] (補題 6 の証明中 (p.2043, 右, 11 行目) における不等式の成立性)

任意の非負整数 $k \geq 0$ に関して,

$$\frac{k - (1 - \frac{1}{2^{3 \cdot 0.3603}})}{2^{0.3603k}} < 1.2832.$$

(証明) 実数 x 上の関数

$$f(x) = \frac{x - (1 - \frac{1}{2^{3 \cdot 0.3603}})}{2^{0.3603x}}$$

を考える. 先ず, $f(0) < f(1) < f(2) < f(3) < f(4) < f(5) < 1.2832 < f(6)$ である. 次に,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2^{0.3603x} - (x - (1 - \frac{1}{2^{3 \cdot 0.3603}})) \cdot \ln 2^{0.3603} \cdot 2^{0.3603x}}{(2^{0.3603x})^2} \\ &= \frac{1 + (1 - \frac{1}{2^{3 \cdot 0.3603}}) \ln 2^{0.3603} - \ln 2^{0.3603x}}{2^{0.3603x}} \\ &< \frac{1.132 - 0.249x}{2^{0.3603x}} < 0 \quad (x \geq 6) \end{aligned}$$

であり, $f(x)$ は $x \geq 6$ において単調減少である. 従って, $\frac{k - (1 - \frac{1}{2^{3 \cdot 0.3603}})}{2^{0.3603k}} < 1.2832$ は任意の非負整数 $k \geq 0$ に対して成立する. $\square$

[補題 A2] (補題 7 の証明中 (p.2044, 左, 下から 11 行目) における不等式の成立性)

定数 $C'' = 6.7 \cdot 10^{11}$ とした時, $\Delta \geq 0$ なる任意の整数 Δ において

$$(\Delta + 1)^3 < C'' 2^{0.0003\Delta}.$$

(証明) いま, 実数 $x \geq 0$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = C'' 2^{0.0003x} - (x + 1)^3$$

と定義するとき,

$$\begin{aligned} f'(x) &= C'' 2^{0.0003x} \cdot \ln 2^{0.0003} - 3(x + 1)^2, \\ f''(x) &= C'' 2^{0.0003x} \cdot (\ln 2^{0.0003})^2 - 6(x + 1), \\ f'''(x) &= C'' 2^{0.0003x} \cdot (\ln 2^{0.0003})^3 - 6. \end{aligned}$$

ここで,

$$(\ln 2^{0.0003})^3 > 8.99 \cdot 10^{-12}$$

であるから, 定数 C'' の設定と, $x \geq 0$ により

$$\begin{aligned} f'''(x) &= C'' 2^{0.0003x} \cdot (\ln 2^{0.0003})^3 - 6 \\ &> 6.7 \cdot 10^{11} \cdot 8.99 \cdot 10^{-12} - 6 \\ &> 6 - 6 = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. $f''(0) > 0$ より, $f''(x) > 0$ は $0 \leq x$ で成立する. 更に $f'(0) > 0$ であるから, $f(x)$ は $0 \leq x$ で単調増加であり, かつ $f(0) > 0$ である.

以上より, 任意の整数 Δ において

$$(\Delta + 1)^3 < C'' 2^{0.0003\Delta}$$

は成立する. $\square$