

(付録： 詳細証明の追記)

[補題 A1] (補題 5 の証明中 (p.850, 左, 11 行目) における不等式の成立性)

任意の非負整数 $k \geq 0$ に関して,

$$\frac{k - (1 - \frac{1}{2^{0.382694}})}{2^{0.382694k}} < 1.30377.$$

(証明) 実数 x 上の関数

$$f(x) = \frac{x - (1 - \frac{1}{2^{0.382694}})}{2^{0.382694x}}$$

を考える. 先ず, $f(0) < f(1) < f(2) < f(3) < f(4) < 1.30377 < f(5)$ である. 次に,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2^{0.382694x} - (x - (1 - \frac{1}{2^{0.382694}})) \cdot \ln 2^{0.382694} \cdot 2^{0.382694x}}{(2^{0.382694x})^2} \\ &= \frac{1 + (1 - \frac{1}{2^{0.382694}}) \ln 2^{0.382694} - \ln 2^{0.382694} x}{2^{0.382694x}} \\ &< \frac{1.062 - 0.265x}{2^{0.382694x}} < 0 \quad (x \geq 4.1) \end{aligned}$$

であり, $f(x)$ は $x \geq 4.1$ において単調減少である.

従って, $\frac{k - (1 - \frac{1}{2^{0.382694}})}{2^{0.382694k}} < 1.30377$ は任意の非負整数 $k \geq 0$ に対して成立する. $\square$

[補題 A2] (補題 6 の証明中 (p.850, 右, 6-7 行目) における不等式の成立性)

定数 $C'' = 1.2 \cdot 10^{11}$ とした時, $\Delta \geq 0$ なる任意の整数 Δ において

$$(\Delta + 1)^2 < C'' 2^{0.000006\Delta}.$$

(証明) いま, 実数上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = C'' 2^{0.000006x} - (x + 1)^2$$

と定義するとき,

$$\begin{aligned} f'(x) &= C'' 2^{0.000006x} \cdot \ln 2^{0.000006} - 2(x + 1), \\ f''(x) &= C'' 2^{0.000006x} \cdot (\ln 2^{0.000006})^2 - 2 \end{aligned}$$

である. ここで, 定数 C'' の設定により

$$\begin{aligned} \ln(2^{0.000006})^2 \cdot C'' &= \ln(2^{0.000006})^2 \cdot 1.2 \cdot 10^{11} \\ &> \ln(2^{0.000006})^2 \cdot \frac{2}{\ln(2^{0.000006})^2} = 2 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} f''(x) &= C'' 2^{0.000006x} \cdot (\ln 2^{0.000006})^2 - 2 \\ &> 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

が任意の正整数上で成り立つ. $f'(0) > 0$ より, $f(x)$ は $0 \leq x$ で単調増加であり, かつ $f(0) > 0$ である.

以上より, $\Delta \geq 0$ なる任意の整数 Δ において

$$(\Delta + 1)^2 < C'' 2^{0.000006\Delta}$$

は成立する. $\square$