(付録： 詳細証明の追記)

4 最大時間計算量評価

[補題 5] 証明（p.1726, 右，1-5 行目 部分）の補足

(2-2) $|EXT_u| = 4$ である場合:

$T(|SUBG_{v_2}|)$ に関しての詳細.

$SUBG$ の子問題 $SUBG_{v_2}$ に対して, 定数 $C_{②-1} = 0.5946$ のもとに, 以下が成立する.

$T(|SUBG_{v_2}|)$
$\leqq C_{②-1}C'2^{0.3337(\Delta-k)}(\Delta+2)^3 + C(\Delta+2)^3.$

(証明) $SUBG_{v_2}$ に対する計算量評価:

(B-1) の場合;

更に, 以下の場合に分かれる.

(B-1-1) $|\Gamma(u_1) \cap SUBG_{v_2}| = |SUBG_{v_2}| - 1$ の場合;

式 (B-1-1) より,

$$T(|SUBG_{v_2}|)$$
$$\leqq T(|SUBG_{v_{2_{u_1}}}|) + C|SUBG_{v_2}|^3$$
$$= T(|SUBG_{v_2}|-1) + C|SUBG_{v_2}|^3$$
$$\leqq C'2^{0.3337((\Delta-k-2+1)-1)} \cdot(((\Delta-k-2+1)-1)+1)^3 +C((\Delta-k-2+1)+1)^3$$
$$= C'2^{0.3337(\Delta-k-2)}(\Delta-k-1)^3 + C(\Delta-k)^3$$
$$< 2^{-0.3337\cdot 2}C'2^{0.3337(\Delta-k)}(\Delta+2)^3 + C(\Delta+2)^3.$$

(B-1-2) $|\Gamma(u_1) \cap SUBG_{v_2}| = |SUBG_{v_2}| - 2$ の場合;

式 (B-1-2) より,

$$T(|SUBG_{v_2}|)$$
$$\leqq T(|SUBG_{v_{2_{u_1}}}|) + C|SUBG_{v_2}|^3$$
$$= T(|SUBG_{v_2}|-2) + C|SUBG_{v_2}|^3$$
$$\leqq C'2^{0.3337((\Delta-k-2+1)-2)} \cdot(((\Delta-k-2+1)-2)+1)^3 +C((\Delta-k-2+1)+1)^3$$
$$= C'2^{0.3337((\Delta-k-3)}(\Delta-k-2)^3 + C(\Delta-k)^3$$
$$< 2^{-0.3337\cdot 3}C'2^{0.3337(\Delta-k)}(\Delta+2)^3 + C(\Delta+2)^3.$$

(B-1-3) $|\Gamma(u_1) \cap SUBG_{v_2}| = |SUBG_{v_2}| - 3$ の場合;

式 (B-1-3) より,

$$T(|SUBG_{v_2}|)$$
$$\leqq T(|SUBG_{v_{2_{u_1}}}|) +T(|SUBG_{v_{2_{TAIL}}}|) + C(\Delta+2)^3.$$

$SUBG_{v_1}$ に対する評価と同様に，Case(a)〜Case(c) によって場合分けを行い計算量を評価すると, $|SUBG_{v_{2_{TAIL}}}| = |SUBG_{v_{2_{u_1}}}| - 3$ のとき計算量上界は最大となる. 従って,

$$T(|SUBG_{v_2}|)$$
$$\leqq T(|SUBG_{v_2}|-3) +T((|SUBG_{v_2}|-3)-3) + C|SUBG_{v_2}|^3$$
$$\leqq C'2^{0.3337((\Delta-k-2+1)-3)}(((\Delta-k-2+1)-3)+1)^3 +C'2^{0.3337((\Delta-k-2+1)-6)}(((\Delta-k-2+1)-6)+1)^3 +C((\Delta-k-2+1)+1)^3$$
$$= C'2^{0.3337((\Delta-k-4)}(\Delta-k-3)^3 +C'2^{0.3337((\Delta-k-7)}(\Delta-k-6)^3 +C((\Delta-k)^3$$
$$< 2^{-0.3337\cdot 4}C'2^{0.3337((\Delta-k)}(\Delta+2)^3 +2^{-0.3337\cdot 7}C'2^{0.3337((\Delta-k)}(\Delta+2)^3 +C((\Delta+2)^3$$
$$= (2^{-0.3337\cdot 4} + 2^{-0.3337\cdot 7})C'2^{0.3337(\Delta-k)}(\Delta+2)^3 +C(\Delta+2)^3.$$

ここで,

$$2^{-0.3337\cdot 3} < 2^{-0.3337\cdot 2} < 2^{-0.3337\cdot 4} + 2^{-0.3337\cdot 7}$$

が成立する． 従って，(B-1) において最も大きい計算量上界をもつのは (B-1-3) である． そこで, $2^{-0.3337\cdot 4} + 2^{-0.3337\cdot 7} = 0.5945...$ より，定数 $C_{②-1}$ を $C_{②-1} = 0.5946$ と定める.

(B-2) の場合;

式 (B-2) より,

$$T(|SUBG_{v_2}|)$$
$$\leqq \sum_{j=3}^{4} T(|SUBG_{(v_2,v_j)}|) + C|SUBG_{v_2}|^3$$
$$= T(|SUBG_{(v_2,v_3)}|) + T(|SUBG_{(v_2,v_4)}|) +C|SUBG_{v_2}|^3$$
$$= T(|\Gamma(v_3) \cap SUBG_{v_2}|) +T(|\Gamma(v_4) \cap (SUBG_{v_2} - \{v_3\})|) + C|SUBG_{v_2}|^3.$$

ここで,

$$|SUBG_{v_2}| - 4 > |\Gamma(v_3) \cap SUBG_{v_2}| > |\Gamma(v_4) \cap (SUBG_{v_2} - \{v_3\})|$$

である. 従って,

$$T(|SUBG_{v_2}|)$$
$$\leqq T(|SUBG_{v_2}|-4) +T((|SUBG_{v_2}|-4)-1) +C|SUBG_{v_2}|^3$$
$$\leqq T((\Delta-k-2+1)-4) +T(((\Delta-k-2+1)-4)-1) +C(\Delta-k-2+1)^3$$
$$= T(\Delta-k-5)$$

$+T(\Delta-k-6)$
$+C(\Delta-k-1)^3$.

帰納法の仮定により，

$T(|SUBG_{v_2}|)$
$\leqq C'2^{0.3337\cdot(\Delta-k-5)}\cdot((\Delta-k-5)+1)^3$
$+C'2^{0.3337\cdot(\Delta-k-6)}((\Delta-k-6)+1)^3$
$+C(\Delta-k-1)^3$
$< C'2^{0.3337\cdot(\Delta-k-5)}\cdot(\Delta+2)^3$
$+C'2^{0.3337\cdot(\Delta-k-6)}(\Delta+2)^3$
$+C(\Delta+2)^3$
$=(2^{-0,3337\cdot 5}+2^{-0.3337\cdot 6})C'2^{0.3337(\Delta-k)}$
$\cdot(\Delta+2)^3$
$+C(\Delta+2)^3$.

ここで，$2^{-0,3337\cdot 5}+2^{-0.3337\cdot 6}=0.56419...$ より，$C_{②-2}=0.5642$ と定める．

$C_{②-2}<C_{②-1}$ より，

$T(|SUBG_{v_2}|)$
$\leqq C_{②-1}C'2^{0.3337(\Delta-k)}(\Delta+2)^3+C(\Delta+2)^3$. □